1月28日

#### 第3章　Short Rate Models

# General properties

【One-factor-short-rate model】

ショートレートを(3.1)式でモデル化．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

また，が に依存すると仮定．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ただし，は全ての変換が可能なくらい十分滑らかな関数．

(3.1)式の仮定の下，をSDEで表す．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

ドリフト項は であるので， は以下の微分方程式を満たす．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2) |

(3.2)式は**term structure equation** と呼ばれる．

はリスク中立測度 のもとでマルチンゲールかつであることより，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3) |

# Popular short-rate models

|  |  |
| --- | --- |
|  | 再掲 (3.1) |

との設定によって以下のモデルに分類される．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Model** | **Distribution** |  |  |
| **Merton** | Normally distribution |  |  |
| **Vasiek** | Normally distribution |  |  |
| **Cox-Ingrsoll-Ross** | Non-central chi-squared distriburion |  |  |
| **Dothan** | Log-normally distribution |  |  |
| **Black-Derman－Toy** | Log-normally distribution |  |  |
| **Ho-Lee** | Normally distribution |  |  |
| **Hull-White (extended Vasiek)** | Normally distribution |  |  |
| **Black-Karasiski** | Log-normally distribution |  |  |

# Merton Model

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Bond Price Formula**

Morton Modelにおける割引債価格 は(3.4)式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

【方針】

ショートレートの区間における積分が次のように表されることを利用する．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

第2項と第3項を合わせて で表す．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Xはと独立なr.v. である．また，リスク中立測度の下で，．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

したがって，(3.3)式よりを計算することが出来る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | とは独立 |

# Vasiek model

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Vasiekモデルは，平均回帰性を備えた初めてのモデル．

SDEを明示的に解くことが可能．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 次のSDEを考える． |  |
|  | 1.式を区間で積分し，を掛ける． |  |
|  | 2.よりリスク中立測度の下でショートレートは正規分布に従う．  とすると，平均は に収束（平均回帰）することが分かる． |  |

**Bond Price Formula**

Vasiekモデルにおける割引債価格 は(3.6)式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

【方針】

の第2項，第3項を計算し，最終的にショートレートの区間における積分が次のように表されることを利用する．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| ただし， | (3.5) |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Xはと独立なr.v. であること．また，．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

あとは，(3.3)式を利用してProp3.1と同様の過程を踏むことで割引債価格を導出できる．

**Affine term Structure Models**

MertonモデルとVasiekモデルの割引債価格は，決定的な関数を用いて表せる．

|  |
| --- |
|  |

このようなモデルを**Affine term Structure Model**と呼ばれる．

(3.1)式におけるとが以下で表される，つまりアフィン関数[[1]](#footnote-1)であるとき，過程は**Affine term Structure**と呼ばれる．

**Appendix A (伊藤の公式)[[2]](#footnote-2)**

は確率微分方程式

を満たすとする．このとき， は確率微分方程式

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

を満足する．

上記の定理を用いることで， のSDEを確認する．

【チェック】

と置き，伊藤の公式を用いると，

となり，確かにのSDEが正しいことが分かる．

**Appendix B (Affine Model)**

アフィン・モデルは，瞬間スポット・レートの確率過程を表現するモデルの1つであり，無裁定条件に加えて，パラメータに一定の制約を課すことで，任意の時刻における任意の満期の割引債のイールドが，「状態変数ベクトルの線形関数」で表現できるため，債券や金利派生商品の価格付けが比較的容易にする．

アフィン・モデルは，実勢水準との乖離が抑制されている（フィッティングの良さ），パラメータの推計のしやすさ，直感的な理解のしやすさなど定量的・定性的な理由から実務家に好まれている．

1. アフィン関数とは「定数＋線形」という形をとるモデルであり，非線形モデルに比べて取り扱いがしやすい． [↑](#footnote-ref-1)
2. 参考資料：木島正明著『期間構造モデルと金利デリバティブ』P17\_定理1.1 [↑](#footnote-ref-2)